Boronkay György Műszaki Középiskola és Gimnázium
2600 Vác, Németh László u. 4- 6.
☎: 27- 317 - 077 ☎/fax: 27- 315 - 093
WEB: http://boronkay.vac.hu **e-mail:** boronkay@vac.hu

EN ISO 9001: 2000

Levelező Matematika Szakkör ***2018/2019. 3. feladatsor***
5.-6. évfolyam

A HAMIS FELTÉTELEZÉSEK MÓDSZERE

A hamis feltételezések módszerét gyakran hamis hipotézisek módszere vagy egyszerűen feltételezések módszere néven emlegetik. A módszer az aritmetikának egy sajátos feladatmegoldási módszere, amelyet két- vagy három ismeretlenes feladatok esetében alkalmazhatunk, de akár még több ismeretlenes feladatokat is oldhatunk meg vele. Elméletileg minden olyan feladat megoldható vele, amelynek mennyiségei arányosak, tehát általában a lineáris egyenletrendszerekre visszavezethető feladatok hatékony megoldási módszere. Hátrány viszont, hogy a megoldás kivitelezése bizonyos esetekben erőltetett.

A módszer lényege: a feladat ismeretlen mennyiségeire nézve valamilyen feltételt (feltételeket) állítunk és összehasonlítjuk a valódi helyzetet (a feladat adatait) a hipotézisek által létrehozott helyzettel. Az eltérés figyelembevételével egyszerű számolások segítségével könnyen következtethetünk arra, hogy mennyiben tér el a hamis feltételezés a helyes megoldástól. Ki kell hangsúlyozni, hogy a feltételezések módszere különbözik az egyszerű próbálgatásoktól és nem a "megoldás eltalálása" a fő célkitűzés. A legfőbb különbséget az jelenti, hogy a hipotézisek felállítása után megpróbálunk következtetni arra, hogy milyen irányban és mennyivel változtassuk meg a feladat ismeretlen mennyiségeit ahhoz, hogy a jó megoldást megtaláljuk.

Mintapéldák

1.) Anna egy 4680 forintos játékot 20 forintos és 50 forintos érmékkel fizetett ki és 4-szer annyi 20 forintost használt fel, mint 50 forintost. Hány érmét használt fel mindegyikből külön-külön?

Feltételezés: Feltételezzük, hogy egy darab 50 forintos és négy darab 20 forintos érmét használt fel. Ekkor a kifizetett összeg $50 + 4 \cdot 20 = 130$ *forint.*
Tehát a játék tényleges ára $4680 : 130 = 36$*-szorosa az általunk feltételezett értéknek. Ezért a feltételezésben szereplő érmék számát 36-szorosára kell növelni. Így a felhasznált 20 forintosok száma* $36 \cdot 4 = 144$*, míg az 50 forintosok száma* $36 \cdot 1 = 36$.

2.) Egy dobozban 80 g-os és 100 g-os csokoládék vannak, amelyeknek össztömege 6280 g. A 80 g-os csokoládék száma 2-vel több, mint a 100 g-osok számának a háromszorosa. Hány 80 g-os, illetve hány 100 g-os csokoládé található a dobozban külön-külön?

Első megoldás:

Ha a dobozból eltávolítunk 2 darab 80 g-os csokoládét, akkor a 80 g-osok száma a 100 g-osokénak a háromszorosa lesz, míg a csokoládék össztömege $6280 - 2 \cdot 80 = 6120$ *g-ra csökken. Utána tételezzük fel, például, hogy a dobozban 1 darab 100 g-os és 3 darab 80 g-os csokoládé van. Ezek össztömege* $3 \cdot 80 + 1 \cdot 100 = 340$ *g, amely* $6120 : 340 = 18$ *–szor kevesebb a tényleges össztömegnél. Tehát a 100 g-os csokoládék száma* $18 \cdot 1 = 18$*, míg a 80 g-osoké* $18 \cdot 3 = 54$.

Visszatéve az elvett 2 darab 80 g-os csokoládét, kapjuk, hogy a dobozban 18 darab 100 g-os és 56 darab 80 g-os csokoládé van.

Második megoldás:

Első feltételezés: *Tételezzük fel, hogy 10 darab 100 g-os és* $3 \cdot 10 + 2 = 32$ *darab 80 g-os csokoládé van. Így a csokoládék össztömege* $10 \cdot 100 + 32 \cdot 80 = 3560$ *g. Ennek az eltérése a tényleges tömegtől* $6280 - 3560 = 2720$ *g, tehát a feltételezésünk hibája 2720 g.*

Második feltételezés: *Növeljük eggyel a 100 g-os csokoládék számát, így a feladat feltételeinek megfelelően 11 darab 100 g-os és* $3 \cdot 11 + 2 = 35$ *darab 80 g-os csokoládé van a dobozban. Ezek össztömege* $11 \cdot 100 + 80 \cdot 35 = 3900$ *g, ennek megfelelően a feltételezésünk hibája* $6280 - 3900 = 2380$ *g.*

Következtetés: *A 100 g-os csokoládék számát 1-gyel növelve a hiba* $2720 - 2380 = 340$ *g-mal csökken. Mivel az első feltételezésnél a hiba 2720 g volt, ezért a 100 g-os csokoládék számát (az első feltételezéshez képest)* $2720 : 340 = 8$ *–cal kell növelni.*

Megoldás: *A 100 g-os csokoládék száma* $10 + 8 = 18$*, míg a 80 g-osoké* $3 \cdot 18 + 2 = 56$.

A könnyebb átláthatóság céljából feltételezéseinket táblázatba foglaljuk:

	100 g-osok száma	80 g-osok száma	össztömeg	hiba
1. felt.	10	32	3560	$6280 - 3560 = 2720$
2. felt.	11	35	3900	$6280 - 3900 = 2380$
Megoldás	18	56	6280	$6280 - 6280 = 0$

3.) Kétfajta cukorka áll rendelkezésünkre, egyiknek az ára 950 Ft/kg, míg a másiké 1250 Ft/kg. A kétfajta cukorkából 80 kg keveréket állítunk elő. Mennyit vegyünk az egyes fajtákból külön-külön, ha azt akarjuk, hogy a keverék egységára 1040 Ft/kg legyen?

Első feltételezés: *Tételezzük fel, hogy mindkét fajtából ugyanannyit teszünk a keverékbe, vagyis fajtánként 40 kg-ot.*

Ebben az esetben a keverék egységára $(40 \cdot 950 + 40 \cdot 1250) : 80 = 1100$ *Ft/kg. Így a 80 kg keverék* $80 \cdot 1100 = 88000$ *forintba kerül, viszont a feladat adatai szerint a 80 kg keverék ára* $80 \cdot 1040 = 83200$ *forint. Tehát a feltételezés hibája* $88000 - 83200 = 4800$ *forint.*

Második feltételezés: *Az első feltételezéshez képest növeljük 1 kg-mal az olcsóbb cukorka mennyiségét, így a drágább mennyisége 1 kg-mal csökken. Ezáltal a keverék értéke* $1250 - 950 = 300$ *forinttal csökken, így a feltételezés hibája* $87700 - 83200 = 4500$ *forint lesz.*

Következtetés: *Mivel 1 kg drágább cukorkát 1 kg olcsóbbra cserélve a keverék értéke (és ugyanakkor a feltételezés hibája) 300 forinttal csökken, ezért az első feltételezéshez képest* $4800:300 = 16$ *ilyen cserére lesz szükség. Így végül a keverék* $40 + 16 = 56$ *kg 950 Ft/kg-os és* $40 - 16 = 24$ *kg 1250 Ft/kg-os cukorkát tartalmaz.*

A könnyebb átláthatóság céljából feltételezéseinket táblázatba foglaljuk:

	950 Ft/kg-os	1250 Ft/kg-os	keverék értéke	hiba
1. felt.	40	40	88000	$88000 - 83200 = 4800$
2. felt.	41	39	87700	$87700 - 83200 = 4500$
Megoldás	56	24	83200	$83200 - 83200 = 0$

Megjegyzés: *Mivel az első feltételezés során a keverék értéke nagyobb volt, mint a feladatban szereplő tényleges érték, ezért azt is átláthattuk, hogy az olcsóbb cukorka mennyiségét kell növelni, míg a drágább cukorkáét csökkenteni.*

4.) Két könyvespolcon könyvek vannak, a másodikon háromszor annyi, mint az elsőn. Ha a másodikról elveszünk 39 könyvet, az elsőre pedig felteszünk még 30 könyvet, akkor a másodikon kétszer annyi könyv lesz, mint az elsőn. Hány könyv van a két könyvespolcon külön-külön?

A megoldás során két feltételezésből keresünk összefüggéseket a hiba alakulására vonatkozóan. A gondolatmenetet a következő táblázatban foglaltuk össze.

	első polc (kezdetben)	második polc (kezdetben)	első polc (végül)	második polc (végül)	hiba
1. felt.	20	$3 \cdot 20 = 60$	$20 + 30 = 50$	$60 - 39 = 21$	$2 \cdot 50 - 21 = 79$
2. felt.	21	$3 \cdot 21 = 63$	$21 + 30 = 51$	$63 - 39 = 24$	$2 \cdot 51 - 24 = 78$
Megoldás	99	$3 \cdot 99 = 297$	$99 + 30 = 129$	$297 - 39 = 258$	$2 \cdot 129 - 258 = 0$

Megjegyzés: *A hiba kiszámításánál a végső helyzetből indultunk ki. Az első polc tartalmának a kétszereséből kivontuk a második polc tartalmát, így következtettünk a feltételezés hibájára. A feltételezések során azt a következtetést vontuk le, hogy az első polc tartalmát eggyel növelve a feltételezés hibája eggyel csökken.*

Gyakorló feladatok

1.) Süsü meghívta a szomszéd sárkányvár hétfejű és kilencfejű sárkányait farsangi mulatságra. 76 lábon 149 fej érkezett a mulatságra. Hány hétfejű és hány kilencfejű sárkány érkezett a vendégségbe, ha minden sárkány négy lábon jár?

2.) Béla malacperselyében 252 érme van, ezek 5, 10 és 50 forintosok. Az érmék összértéke 4620 forint. Az 5 és 10 forintosokból együtt háromszor annyi van, mint az 50 forintosokból. Hány 5, 10, illetve 50 forintos érméje van külön-külön?

3.) András matematika feladatokat old meg. Eltervezte, hogy naponta hány feladatot old meg, így 40 nap alatt végezne. Viszont ha naponta 6-tal több feladatot oldana meg, akkor 30 nap alatt végezne. Hány feladatot kell megoldania Andrásnak?

4.) Egy dobozban piros és fehér golyók vannak. A piros golyók száma háromszorosa a fehér golyók számának. Ha 65 piros golyót kiveszünk, fehérre festjük és visszatesszük, akkor a fehér golyók száma kétszerese lesz a piros golyók számának. Hány piros, illetve fehér golyó van a dobozban külön-külön?

Kitűzött feladatok

1.) Nagymamának 8 napos és 10 napos csibéi vannak. A 10 napos csibék száma 3-mal kevesebb a 8 napos csibék számának a kétszeresénél. A csibék életkorának összege 2014 év. Számítsuk ki, hány 8, illetve 10 napos csibéje van nagymamának külön-külön?

2.) János gazda a piacon libatojásokat és tyúktojásokat árul. Egy libatojás 130 forintba, egy tyúktojás 50 forintba kerül. Egy vevő 80 tojást akart venni, darabjáért 98 forintot volt hajlandó fizetni. A vásárt megkötötték, mégpedig úgy, hogy a vevő és az eladó igénye is teljesüljön. Hány tyúktojás és hány libatojás került a vevő kosarába, külön-külön?

3.) Béla egy 2880 forintos játékot 20 forintos és 100 forintos érmékkel fizetett ki. Hány érme volt mindegyikből külön-külön, ha összesen 60 érmét használt fel?

4.) Annának kétszer annyi kitűzője volt, mint Beának. Bea vásárolt 153 kitűzőt, Anna viszont elveszített hatot. Így most Beának kétszer annyi kitűzője van, mint Annának. Kezdetben hány kitűzőjük volt a lányoknak külön-külön?

(A feladatok megoldásait kérjük, hogy kidolgozva, A/4 méretű papíron küldjék be. A versenyzők azonosítása miatt kérjük, hogy minden dolgozaton szerepeljen a következő 2 adat: NÉV, ÉVFOLYAM.)

Beküldési határidő: **2019. 02. 01.**
Postai cím: Észak-Pest Megyei Matematikai Tehetségfejlesztő Központ
2600 Vác, Németh L. u. 4-6.

Boronkay György Műszaki Középiskola és Gimnázium
2600 Vác, Németh László u. 4- 6.
☎: 27- 317 - 077 *☎/fax: 27- 315 - 093*
***WEB:** http://boronkay.vac.hu* ***e-mail:** boronkay@vac.hu*

EN ISO 9001: 2000

Levelező Matematika Szakkör ***2018/2019. 3. feladatsor***
7.-8. évfolyam

MATEMATIKAI JÁTÉKOK

A játékelmélet viszonylag fiatal tudományága a matematikának. Egyre bővülő alkalmazási lehetőségei miatt növekszik iránta az érdeklődés még a nem matematikusok körében is. Figyelmet érdemlő számunkra aza a tény is, hogy a játékelmélet megalapozója: Neumann János (1903-1957), valamint első jelentős továbbfejlesztője és alkalmazója: Wald Ábrahám (1902-1950) magyar származású matematikusok voltak. Reméljük a játékokat leíró feladatok jó szórakozást nyújtanak minden érdeklődő olvasónknak, versenyzőnknek! Jó szívvel javasoljuk a játékok kipróbálását, játszását is!

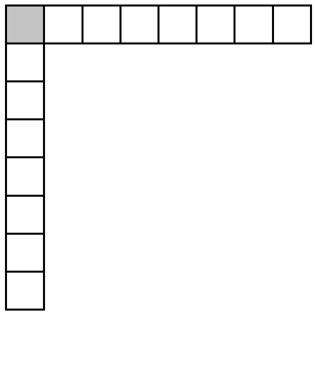
Mintapéldák

1.) Egy téglalap alakú asztalra két játékos felváltva helyez 5 Ft-os érméket úgy, hogy az érmék egymást nem fedhetik. Az a győztes, aki utoljára tud tenni. A kezdő nyerhet. Hogyan?

Ha a kezdő első lépésével elfoglalja az asztal szimmetriaközéppontját, majd mindig ellenfele lépésének a középpontra vett tükörképét lépi, akkor nyerni fog. Ugyanis amíg a másik játékos talál szabad helyet az asztalon, addig annak a helynek a tükörképe is szabad, azaz ha a második játékos tud lépni, akkor a kezdő játékos is. A kezdő játékos lép utoljára.

2.) Van egy 8x8-as csokitáblánk, melynek bal felső szelete mérgezett. Két játékos felváltva tör a táblából úgy, hogy valamelyik mezőt kiválasztja, s az összes tőle jobbra és lefelé eső szeletet letöri. Az veszít, aki kénytelen a mérgezett szeletet elvenni. Mutassuk meg, hogy a kezdő megnyerheti a játékot!

A kezdő elveszi a tábla jobb alsó 7x7-es részét, majd mindig annyi szeletet vesz el, mint az ellenfele. Ha a másik játékos az oszlopból vesz, akkor ő a sorból, ill. fordítva.

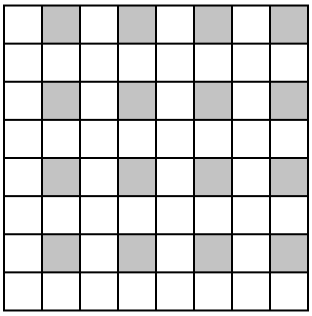


3.) Az asztalon 27 db gyufaszál van, s ketten felváltva elvesznek 1, 2 vagy 3 szálat. Az a játékos nyer, aki utolsóként vesz. Melyik játékosnak van nyerő stratégiája?

Gondolkodjunk visszafelé, a „rákmódszer”-rel, keressük meg a nyerő helyeket! Aki 4 szál gyufát hagy az asztalon, az nyer, hiszen ellenfele mind a négyet nem tudja elvenni, de az ellenfél lépése után a maradékot ő el tudja venni, ezzel megnyerve a játékot. 4 szálat úgy tud meghagyni, ha előzőleg 8 szálat hagyott az asztalon, s így visszafele a nyerő helyek: 12, 16, 20,24. A kezdő játékos tud nyerni. Elsőként 3 szál gyufát vesz el (ekkor megmarad 24 szál), majd ellenfele minden vételét 4-re egészíti ki, s ily módon hagy rendre 20, 16, 12, 8, 4 majd 0 szál gyufát az asztalon.

4.) Egy 8x8-as sakktábla bal alsó sarkából indul egy bábu. Két játékos felváltva tolja egy-egy mezővel jobbra, felfelé vagy jobbra átlósan felfelé. Az nyer, aki a jobb felső mezőre lép. A kezdő játékos nyerhet. Hogyan?

Keressük a nyerő helyeket! Ilyen hely természetesen a jobb felső sarok. Könnyű látni, hogy a felső sorban és a jobb szélső oszlopban a vonalkázott mezők nyerő helyek: aki ide lépett, az ezután már csak ilyen mezőre tud lépni, s megnyeri a játékot. Sorra felderíthető, hogy melyik mező „jó”, melyik „rossz”. Az ábrán a vonalkázott mezők a nyerő helyek. A kezdő első lépésében jobbra átlósan lép, majd mindig megismétli ellenfele lépését, s így a nyerő mezőkön lépkedve győzni fog.



Gyakorló feladatok

1.) Két játékos felváltva színezi egy kocka 3-3 élét pirossal, illetve feketével. Az a győztes, aki a kocka valamely lapjának mind a négy élét saját színével színezte ki. Melyik játékosnak van nyerő stratégiája?

2.) Négyzet alakban leraktunk az asztalra 5x5 kavicsot. Két játékos felváltva vesz belőlük egy darabot vagy két oldalszomszédosat. Az győz, aki utolsóként vesz. A kezdő nyerhet. Hogyan?

3.) Az asztalon 40 db gyufaszál van, s ketten felváltva vesznek 2, 3, 4 vagy 5 szálat. Az a játékos veszít, aki utolsóként vesz. Melyik játékosnak van nyerő stratégiája?

4.) Egy 8x8-as sakktábla bal alsó sarkából indul egy bábu. Két játékos felváltva tolja 1 vagy 2 mezővel jobbra, felfelé vagy jobbra átlósan felfelé. Az nyer, aki a jobb felső mezőre lép. Melyik játékos nyerhet?

Kitűzött feladatok

1.) Egy kupacban 60, egy másikban pedig 70 kavics van. Két játékos felváltva vesz valamelyik kupacból legalább egyet, de abból akár az összes kavicsot is elveheti. Az győz, aki utolsóként vesz. A kezdő nyerhet. Hogyan?

2.) Négyzet alakban leraktunk az asztalra 6x6 kavicsot. Két játékos felváltva vesz belőlük egy darabot vagy két oldalszomszédosat. Az győz, aki utolsóként vesz. Melyik játékos nyerhet? Hogyan?

3.) Ketten a következő játékot játsszák. A 4, 5, 6, 7, 8 számok közül felváltva mondanak egy-egy tetszés szerint választott számot, s mindig kiszámolják az addig mondott számok szorzatát. A játékot az nyeri, akinél a szorzat túllépi a 2000-et. Melyik játékosnak van nyerő stratégiája?

4.) Az asztalon 40 db gyufaszál van. Ketten felváltva vesznek 2, 3, 4 vagy 5 szálat. Az a játékos nyer, aki utolsóként vesz. Melyik játékosnak van nyerő stratégiája?

(A feladatok megoldásait kérjük, hogy kidolgozva, A/4 méretű papíron küldjék be. A versenyzők azonosítása miatt kérjük, hogy minden dolgozaton szerepeljen a következő 2 adat: NÉV, ÉVFOLYAM.)

Beküldési határidő:	**2019. 02. 01.**
Postai cím:	Észak-Pest Megyei Matematikai Tehetségfejlesztő Központ 2600 Vác, Németh L. u. 4-6.