



Boronkay György Műszaki Középiskola és Gimnázium

2600 Vác, Németh László u. 4- 6.

☎: 27- 317 - 077

☎/fax: 27- 315 - 093

WEB: <http://boronkay.vac.hu> e-mail: boronkay@vac.hu



Levelező Matematika Szakkör

2018/2019. 4. feladatsor

5.-6. évfolyam

GONDOLKODJUNK LOGIKUSAN

A matematikai logika a matematikának egy nagyon érdekes, ugyanakkor bizonyos esetekben indokolatlanul elhanyagolt területe. Ha valaki a matematikára gondol, akkor azonnal számok és képletek jelennek meg előtte. Figyelmen kívül marad az a tény, hogy a matematika valójában egy olyan tudomány, amely nem elsősorban a számolási készségeket, hanem a gondolkodást fejleszti. Érvényben van az a vélemény, hogy aki nem képes gyorsan fejben számolni lehet még nagy matematikus, viszont ha nem gondolkodik, akkor soha nem fogja megérteni ezt a tudományt. A matematikai logika elsősorban a gondolkodást fejleszti, mellesleg a logikai feladatok sokszor érdekesebbek tudnak lenni a képleteken és számolásokon alapuló feladatoknál. A következőkben egy kis ízelítőt nyújtunk a matematikának ebből a nagyszerű és érdekes fejezetéből.

Mintapéldák

- 1.) Nekeresd-szigeten kétféle ember él: igazmondók, akik mindig igazat mondanak és hazudósak, akik mindig hazudnak. A szigetlakók ismerik egymást, tehát tudják egymásról, hogy ki igazmondó és ki nem. Tamás hajótörökként a szigetre vetődött.
 - a) Az első napon találkozott 11 szigetlakóval és mindegyiktől megkérdezte: hány igazmondó van köztetek? A következő válaszokat kapta: 4, 0, 3, 6, 7, 3, 6, 5, 4, 3, 7. Hány igazmondó van közöttük?
 - b) A második napon másik 9 szigetlakóval találkozott. Őnekik is ugyanazt a kérdést tette fel. A válaszok a következők voltak: 1, 4, 6, 3, 1, 2, 7, 6, 2. Hány igazmondó van közöttük?
 - c) A harmadik napon 10 szigetlakóval találkozott. Tamás ugyanazt a kérdést intézte hozzájuk. Az első nyolc megkérdezett a következő válaszokat adta: 4, 1, 0, 6, 5, 8, 5, 1. Mit válaszolhatott a másik két szigetlakó? Hány igazmondó van közöttük?
- a) *A válaszok között szerepel a 0, ez kiemelt jelentőséggel bír. Ezt egy igazmondó nem mondhatta, mivel akkor nem 0 lenne az igazmondók száma. Tehát a 0 választ biztosan egy hazudós mondta. Akkor viszont a szigetlakók között az igazmondók száma nem 0, tehát legalább egy igazmondó van közöttük. Ebben az esetben viszont, ha 1 igazmondó lenne közöttük, akkor az 1 válasz egyszer szerepelne, ha két igazmondó lenne, akkor a 2 válasz kétszer szerepelne és így tovább. Ezt a*

gondolatmenetet folytatva megtaláljuk a helyes választ, ugyanis 3 olyan szigetlakó van, aki azt állította, hogy az igazmondók száma 3. Tehát 3 igazmondó van a szigeten.

- b) *Ebben az esetben nem szerepel a 0 válasz, amely kizárná, hogy 0 igazmondó legyen közöttük. Ezért két eset lehetséges.*

Első eset: A megkérdezett szigetlakók között 0 igazmondó van, ebben az esetben mindenki hazudik.

Második eset: A megkérdezettek között vannak igazmondók is, ebben az esetben viszont csakis 2 igazmondó lehet az a) alpont gondolatmenetét követve.

- c) *Az a) és b) alpontok gondolatmenetét követjük. Mivel a 0 válasz is szerepel, ezért legalább egy igazmondó van a szigeten. Vizsgáljuk meg a többi választ! 1 igazmondó nem lehet, mivel ezt ketten állították. 4 igazmondó sem lehet, mivel ha az utolsó két megkérdezett is a 4 választ adta volna, akkor is csak három megkérdezett adta volna a 4 választ. Ugyanez a helyzet az 5, 6 és 8 válaszokkal is. Tehát az utolsó két megkérdezett csak a 2 választ adhatta és így két igazmondó van a megkérdezettek között.*

- 2.) Bélának van 3 fehér és 3 zöld golyója, ezeket párosával egy-egy dobozba tette, és felírta, hogy melyik dobozban milyen színű golyók vannak. Testvére a feliratokat összecserélte úgy, hogy mindegyik felirat egy másik dobozra került. Így a dobozokon a következő feliratok vannak:

1. doboz: 2 fehér
2. doboz: 2 zöld
3. doboz: 1 fehér, 1 zöld

Melyik dobozból kell, hogy egy golyót kivegyen Béla ahhoz, hogy azt megnézve pontosan meg tudja állapítani, hogy melyik dobozban milyen színű golyók vannak?

A harmadik dobozból kell kivenni egy golyót. Ha az a golyó fehér, akkor abban a dobozban 2 fehér golyó van. A másodikban nem lehet két zöld, így viszont egy fehér és egy zöld van a második dobozban. Az első doboz tartalma viszont már csak két zöld lehet. Hasonló a gondolatmenet, ha a harmadik dobozból elsőre zöldet húz.

Könnyen ellenőrizhető, hogy az első vagy második dobozból egy golyót kihúzva, nem következtethetünk egyértelműen a dobozok tartalmára vonatkozóan.

- 3.) Egy asztal mellett három ember ül: az *Igazság* (aki mindig igazat mond), a *Hazugság* (aki mindig hazudik) és a *Bölcsesség* (aki olykor igazat mond, máskor hazudik). Egy ismeretlen ember megkérdezte a bal oldalt: „*Ki ül melletted*”, az így válaszolt: „*Az Igazság*”. Ezután a középsőt kérdezte meg: „*Ki vagy?*”, ő azt mondta „*A Bölcsesség*”. Utolsóként a jobb oldalhoz fordult: „*Ki ül melletted?*”, ez így szólt „*A Hazugság*”. Balról jobbra milyen sorrendben ülnek?

Mivel az Igazság mindig igazat mond, ezért ő nem lehet a bal oldali (mert akkor az Igazság mellette ülne), de nem lehet a középső sem (mivel hamisat állítana azzal, hogy ő a Bölcsesség). Tehát az Igazság a jobb oldalon ül.

Mivel a jobb oldalon ül az Igazság, ezért az ő állítása igaz, tehát mellette (azaz középen) a Hazugság ül. Így kizárásos alapon a Bölcsesség a bal oldalon ül.

Így balról jobbra a sorrend: Bölcsesség, Hazugság, Igazság.

- 4.) Mint köztudott, Erdélyben medvék, emberek és vámpírok laknak. Az egészséges vámpírok mindig hazudnak, az egészséges emberek mindig igazat mondanak. Viszont az emberek és a vámpírok között örültek is akadnak, ezeknek kényszerképzeteik vannak: az örült emberek hazudnak, míg az örült vámpírok igazat mondanak. Egy apa és fia kihallgatáson vettek részt. Az egyikük ember, a másikuk vámpír. A következőket vallották:

Apa: Legalább egyikünk örült.

Fiú: Ez pontosan így igaz!

Apa: Én természetesen nem vagyok vámpír.

Kettőjük közül melyik a vámpír?

Mindketten azonosan válaszolnak az elemállapotukról feltett kérdésre. Ez azt jelenti, hogy mindketten igazat mondanak, vagy mindketten hazudnak. De mivel az egyikük ember, a másikuk vámpír, ezért az elmeállapotuk különböző. Tehát egyikük örült, a másik egészséges. Tehát igaz, hogy legalább egyikük örült, ezért az apa igazat mond. Ezért mindketten igazat mondanak. Az apa azt mondja magáról, hogy ő nem vámpír, így tényleg nem az. Tehát a fiú a vámpír.

Gyakorló feladatok

- 1.) Egy papírlapon az alábbi négy állítás olvasható:

- 1. Ezen a lapon pontosan 1 állítás hamis;*
- 2. Ezen a lapon pontosan 2 állítás hamis;*
- 3. Ezen a lapon pontosan 3 állítás hamis;*
- 4. Ezen a lapon pontosan 4 állítás hamis.*

A fenti állítások közül melyik igaz?

- 2.) Egy kastély kulcsát három doboz közül az egyikben helyezték el, majd a dobozokat a következő feliratokkal látták el.

- 1. doboz: A kulcs ebben a dobozban van.*
- 2. doboz: A kulcs nem az 1. dobozban van.*
- 3. doboz: A kulcs nem ebben a dobozban van*

Azt is tudjuk, hogy a dobozokon lévő feliratok közül legfeljebb az egyik igaz. Melyik dobozban van a kastély kulcsa?

3.) Nekeresd-szigeten kétféle ember él: igazmondók, akik mindig igazat mondanak és hazudósak, akik mindig hazudnak.

- a) Béla megkérdezte az egyik szigetlakót: „*Te igazmondó vagy?*” Milyen választ kaphatott a kérdésre? A válaszból meg tudta állapítani, hogy az illető lakos igazmondó vagy hazudós?
- b) Azután találkozott két másik szigetlakóval, Andrással és Jánossal. Meg akarta tudni miféle emberek ők. Egyedül János szólalt meg, a következőt állította: „*Legalább az egyikünk hazudós*”. Melyik ember milyen típusú?
- c) Pár nappal később találkozott másik két szigetlakóval, Aladárral és Dénessel. Arra a kérdésre, hogy miféle emberek ők, Aladár így válaszolt: „*Én hazudós vagyok és a társam igazmondó.*” Miféle emberek ők?

4.) Jancsi és Juliska Erdélyben élnek egy erdő közepén. Az egyik közülük ember, a másik vámpír. Azt is tudjuk, hogy az egyik egészséges, a másik pedig őrült. Ezeket mondják:

Jancsi: Juliska vámpír.

Juliska: Jancsi őrült.

Melyikük a vámpír? Melyiküknek milyen az elmeállapota?

Kitűzött feladatok

1.) Nekeresd-szigeten kétféle ember él: igazmondók, akik mindig igazat mondanak és hazudósak, akik mindig hazudnak. A szigetlakók ismerik egymást, tehát tudják egymásról, hogy ki igazmondó és ki nem. Tamás hajótörökként a szigetre vetődött. Az első napon találkozott három szigetlakóval: Andrással, Bélával és Csabával. Megkérdezte őket, hogy közülük ki igazmondó és ki hazudós? A következőket válaszolták.

András: *Mi mindannyian hazudósak vagyunk.*

Béla: *Csak András hazudós.*

Csaba: *András és Béla is hazudós.*

Ki igazmondó és ki hazudós a szigetlakók közül?

2.) Egy városban háromféle lakos van: igazmondók, akik mindig igazat mondanak, hazudósak, akik mindig hazudnak és füllentők, akik néha igazat mondanak, néha hazudnak, ahogy a kedvük tartja. Ebben a városban egy éjjel betörték a bankba. A rendőrök elfogtak három embert, Andrást, Bélát és Csabát. Megtudták, hogy közülük egy igazmondó, egy hazudós, egy pedig füllentő, és köztük van a tettes, mégpedig az igazmondó. A három ember az alábbiakat mondja:

András: *Ártatlan vagyok.*

Béla: *Tényleg ártatlan.*

Csaba: *Én törtem be a bankba.*

Ki tört be a bankba, és melyikük a hazudós, illetve a füllentő?

3.) Puskás Öcsi három doboz egyikében elrejtett egy focilabdát. A dobozokat a következő feliratokkal látta el:

1. doboz: *A labda nem a 2. dobozban van.*
2. doboz: *A labda nem ebben a dobozban van.*
3. doboz: *A labda ebben a dobozban van.*

Azt mondta a barátainak, hogy csak akkor játszhatnak ezzel a labdával, ha kitalálják, hogy melyik dobozban van. Még azt is megmondta, hogy a feliratok között van igaz és hamis is. Melyik dobozban van a focilabda?

4.) Erdélyben az embereknek tilos a vámpírokkal összeházasodni, ezért egy erdélyi házaspárban vagy mindketten emberek, vagy mindketten vámpírok. Természetesen egy házaspár esetében az elmeállapotuk különböző lehet. Egyszer egy házaspár, Józsi bácsi és Mariska néni, a következőket állították magukról:

- Mariska néni: *A férjem ember.*
Józsi bácsi: *A feleségem vámpír.*
Mariska néni: *Egyikünk egészséges, a másikunk nem.*

Ők emberek vagy vámpírok? Melyiküknek milyen az elmeállapota?

(A feladatok megoldásait kérjük, hogy kidolgozva, A/4 méretű papíron küldjék be. A versenyzők azonosítása miatt kérjük, hogy minden dolgozaton szerepeljen a következő 2 adat: NÉV, ÉVFOLYAM.)

Beküldési határidő: **2019. 02. 28.**

Postai cím: Észak-Pest Megyei Matematikai Tehetségfejlesztő Központ
2600 Vác, Németh L. u. 4-6.



Boronkay György Műszaki Középiskola és Gimnázium

2600 Vác, Németh László u. 4- 6.

☎: 27- 317 - 077

☎/fax: 27- 315 - 093

WEB: <http://boronkay.vac.hu> e-mail: boronkay@vac.hu



Levelező Matematika Szakkör

2018/2019. 4. feladatsor

7.-8. évfolyam

MELYIK SZÁM A NAGYOBB?

A legkülönbözőbb évfolyamok diákjai találkozhatnak matematika órákon a címbeli kérdéssel. Ennek megfelelően az alkalmazott technikák a legszélesebb skálán mozoghatnak annak függvényében, hogy a megcélzott korosztály milyen szintű eszköztárral, számolási készséggel bír. Az itt található feladatanyag a legelemibb átalakítási azonosságokra alapoz, elsősorban a hatványozás témaköréből. Egyszerűségükben rejlik a feladatok szépsége is. Sok sikert mindenkinek a megoldásukban, de leginkább a 7. és 8. osztályosoknak!

Mintapéldák

1.) Melyik szám a nagyobb: 2^{300} vagy 3^{200} ?

$3^2 > 2^3$, ezért $3^{200} > 2^{300}$ (mindkét oldalt a 100. hatványra emeltük és alkalmaztuk a hatvány hatványozására vonatkozó azonosságot. $(a^n)^k = a^{n \cdot k}$)

2.) Melyik nagyobb: 1991^{10} vagy $1990^{10} + 1990^9$?

Emeljük ki a közös tényezőt a jobboldali összegből!

$1990^{10} + 1990^9 = 1990^9(1990 + 1) < 1991^9 \cdot 1991 = 1991^{10}$, tehát az első szám a nagyobb.

3.) Melyik szám nagyobb: $\frac{999}{1000}$ vagy $\frac{1000}{1001}$?

Vizsgáljuk meg, hogy a két szám mennyivel kisebb 1-nél!

$\frac{999}{1000} = 1 - \frac{1}{1000} < 1 - \frac{1}{1001} = \frac{1000}{1001}$, tehát a második szám a nagyobb.

4.) Melyik nagyobb: $\frac{3}{5}$ vagy $\frac{300000001}{500000001}$?

Osszuk el a két pozitív mennyiséget egymással és vizsgáljuk meg, hogy a kapott eredmény hogyan viszonyul az egyhez!

$\frac{3}{5} \cdot \frac{300000001}{500000001} = \frac{3}{5} \cdot \frac{500000001}{300000001} = \frac{1500000003}{1500000005} < 1$, tehát a második szám a nagyobb.

Gyakorló feladatok

- 1.) Melyik nagyobb: 2^{100} vagy 10^{30} ?
- 2.) Melyik nagyobb: 3^{500} vagy 7^{300} ?
- 3.) Melyik nagyobb: $\frac{22222221}{22222223}$ vagy $\frac{33333331}{33333334}$?
- 4.) Melyik nagyobb: 31^{11} vagy 17^{14} ?

Kitűzött feladatok

- 1.) Melyik nagyobb: 3^{21} vagy 2^{31} ?
- 2.) Melyik nagyobb: 9^{20} vagy 27^{13} ?
- 3.) Melyik nagyobb: $\frac{222221}{333332}$ vagy $\frac{444443}{666665}$?
- 4.) Melyik nagyobb: 127^{23} vagy 513^{18} ?

(A feladatok megoldásait kérjük, hogy kidolgozva, A/4 méretű papíron küldjék be. A versenyzők azonosítása miatt kérjük, hogy minden dolgozaton szerepeljen a következő 2 adat: NÉV, ÉVFOLYAM.)

Beküldési határidő: **2019. 03. 01.**
Postai cím: Észak-Pest Megyei Matematikai Tehetségfejlesztő Központ
2600 Vác, Németh L. u. 4-6.