Boronkay György Műszaki Középiskola és Gimnázium
2600 Vác, Németh László u. 4- 6.
☎: 27- 317 - 077 ☎/fax: 27- 315 - 093
WEB: http://boronkay.vac.hu **e-mail:** boronkay@vac.hu

EN ISO 9001 : 2000

Levelező Matematika Szakkör ***2018/2019.***

DÖNTŐ

5. OSZTÁLY

1.) **Hány olyan 3000-nél nagyobb négyjegyű természetes szám van, amelyben a számjegyek összege legfeljebb 6?**

A feltételeknek eleget tevő négyjegyű természetes számok első számjegye legalább 3 és legfeljebb 6. A lehetséges számjegyek és az azokból képezhető négyjegyű számoknak a számát a következő táblázatban foglaltuk össze:

A szám képzéséhez szükséges számjegyek	A számjegyekből képezhető négyjegyű számoknak a száma
3; 1; 0; 0	3
3; 1; 1; 0	3
3; 2; 0; 0	3
3; 2; 1; 0	6
3; 1; 1; 1	1
4; 0; 0; 0	1
4; 1; 0; 0	3
5; 0; 0; 0	1
3; 3; 0; 0;	3
4; 1; 1; 0	3
4; 2; 0; 0	3
5; 1; 0; 0	3
6; 0; 0; 0	1

<u>Tehát összesen 34 olyan négyjegyű természetes szám van, amely eleget tesz a feladat feltételeinek.</u>

2.) Egy teherautóra 2 kg-os és 3 kg-os téglákat raktak. A 2 kg-os téglák száma 4-gyel több, mint a 3 kg-os téglák számának a kétszerese. A rakomány össztömege 932 kg. Hány 2 kg-os, illetve 3 kg-os tégla van a teherautón külön-külön?

A hamis feltételezések módszerével próbálkozunk. Egy lehetséges gondolatmenetet táblázatba foglalunk:

	3 kg-os téglák száma	2 kg-os téglák száma	A rakomány össztömege	Hiba
1. felt.	60	$2 \cdot 60 + 4 = 124$	$3 \cdot 60 + 2 \cdot 124 = 428$	504
2. felt.	61	$2 \cdot 61 + 4 = 126$	$3 \cdot 61 + 2 \cdot 126 = 435$	497
Megoldás	132	$2 \cdot 132 + 4 = 268$	$3 \cdot 132 + 2 \cdot 268 = 932$	0

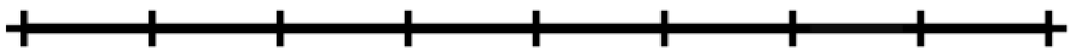
Megjegyzés: Észre lehet venni, hogy a 3 kg-os téglák számát eggyel növelve a hiba 7-tel csökken. Tehát a 3 kg-os téglák számát $504 : 7 = 72$ *-vel kell növelni (az első feltételezéshez képest).*

Tehát a 3 kg-os téglák száma 132 $(60 + 72)$, míg a 2 kg-os téglák száma 268 $(2 \cdot 132 + 4)$

3.) János gazda tanyáján nyolcszor annyi birka volt, mint tehén. Levágta a birkák negyedét és még eladott 68 birkát. Így most a birkák száma négyszerese a tehenek számának. Hány birkája, illetve tehene volt kezdetben János gazdának?

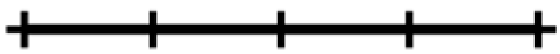
Készítsünk megfelelő ábrát, amellyel a kezdeti feltételeket szemléltetjük.

A birkák száma kezdetben:



A tehenek száma kezdetben:

Mivel végül a birkák száma négyszerese a tehenek számának (miközben a tehenek száma nem változott) ezért ezt a következőképpen szemléltetjük.



A kezdeti ábrával összehasonlítva négy szakasz „tűnt el”. Ebből két szakasz a birkák számának negyedét (levágott birkák), míg a másik kettő az eladott birkákat (68 birka) jelenti. Tehát az ábrán egy szakasz $68 : 2 = 34$ állatot jelent. Így kezdetben János gazdának $\underline{8 \cdot 34 =}$ $\underline{272}$ birkája és 34 tehene volt.

4.) **Mint köztudott, Erdélyben medvék, emberek és vámpírok laknak. Az egészséges vámpírok mindig hazudnak, az egészséges emberek mindig igazat mondanak. Viszont az emberek és a vámpírok között őrültek is akadnak, ezeknek kényszerképzeteik vannak: az őrült emberek hazudnak, míg az őrült vámpírok igazat mondanak.**
Jóska és Pista testvérek, egyik közülük vámpír, a másik nem, Jóska az idősebb. A következőket mondják:

Jóska: Én ember vagyok.
Pista: Én ember vagyok.
Jóska: Az öcsém egészséges.

Melyikük a vámpír? Milyen az elmeállapotuk?

Ha egy erdélyi azt mondja, hogy ő ember, akkor egészséges (mivel vagy igazat mond és akkor egészséges ember, vagy hazudik és akkor egészséges vámpír). Jóska és Pista mindketten embereknek vallották magukat, tehát mindketten egészségesek. Ezért Jóska igazat állít, mivel azt mondja, hogy az öccse egészséges. Ebből következik, hogy Jóska egészséges ember, Pista pedig egészséges vámpír. Tehát Pista a vámpír.

Levelező Matematika Szakkör ***2018/2019.***

DÖNTŐ

6. OSZTÁLY

1.) Palindrom számoknak nevezzük azokat a természetes számokat, amelyek számjegyeit fordított sorrendben olvasva ugyanazt a számot kapjuk. Például ilyen palindrom szám az 56865. Hány olyan 30000-nél nagyobb ötjegyű palindrom szám van, amelyben a számjegyek összege legfeljebb 12?

A feltételeknek eleget tevő palindrom számok számjegyeinek összege legalább 6 és legfeljebb 12. A számjegyek összege szerint a palindrom számokat a következő táblázatban foglaltuk össze:

Számjegyek összege	A palindrom számok
6	30003
7	30103
8	30203; 31013; 40004
9	30303; 31113; 40104
10	30403; 31213; 32023; 40204; 41014; 50005
11	30503; 31313; 32123; 40304; 41114; 50105
12	30603; 31413; 32223; 33033; 40404; 41214; 42024; 50205; 51015; 60006

<u>Tehát 30 olyan palindrom szám van, amely eleget tesz a feladat feltételeinek.</u>

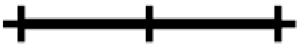
2.) János gazda tanyáján háromszor annyi birka volt, mint tehén. Vásárolt még 56 birkát és megkétszerezte a tehenek számát. Így most a birkák száma kétszerese a tehenek számának. Hány birkája, illetve tehene volt kezdetben János gazdának?

Készítsünk megfelelő ábrát, amellyel a kezdeti feltételeket szemléltetjük.

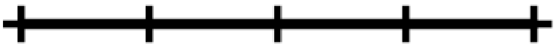
A birkák száma kezdetben:

A tehenek száma kezdetben:

A tehenek száma a végső helyzetben:



A birkák száma a végső helyzetben kétszerese a tehenek számának, ezért ezt a következőképpen szemléltetjük:



Mivel a birkák száma a kezdeti és végső helyzet között 56-tal növekedett (míg az ábrán kezdetben három szakasszal, míg a végső helyzetben négy szakasszal ábrázoltuk), ezért a fenti ábrákon egy szakasz 56 állatot jelent. Így a tehenek száma kezdetben 56, míg a birkák száma $3 \cdot 56 = 168.$

3.) **Péter malacperselyében 20 forintos, 50 forintos és 100 forintos érmék vannak. Az 50 forintosok száma a 100 forintos érmék számának a kétszerese. A 20 forintos érmék száma 38-cal több az 50 forintosokénál. Az érmék összértéke 8440 forint. Hány 20 forintos, 50 forintos, illetve 100 forintos érme van a perselyben külön-külön?**

A hamis feltételezések módszerével próbálkozunk. Egy lehetséges gondolatmenetet táblázatba foglalunk:

	100 Ft-osok száma	50 Ft-osok száma	20 Ft-osok száma	Összérték	Hiba
1. felt.	20	$2 \cdot 20 = 40$	$40 + 38 = 78$	5560	2880
2. felt.	21	$2 \cdot 21 = 42$	$42 + 38 = 80$	5800	2640
Megoldás	32	$2 \cdot 32 = 64$	$64 + 38 = 102$	8440	0

Megjegyzés: Észre lehet venni, hogy a 100 forintos érmék számát eggyel növelve a hiba 240-nel csökken. Tehát a 100 forintos érmék számát $2880 : 240 = 12$ *-vel kell növelni (az első feltételezéshez képest).*

Tehát a 100 forintosok száma $20 + 12 = 32$, míg az 50 forintosoké $2 \cdot 32 = 64$ és a 20 forintosoké $64 + 38 = 102.$

4.) **Mint köztudott, Erdélyben medvék, emberek és vámpírok laknak. Az egészséges vámpírok mindig hazudnak, az egészséges emberek mindig igazat mondanak. Viszont az emberek és a vámpírok között őrültek is akadnak, ezeknek kényszerképzeteik vannak: az őrült emberek hazudnak, míg az őrült vámpírok igazat mondanak.**
Erdélyben az embereknek tilos a vámpírokkal összeházasodni, ezért egy erdélyi házaspárban vagy mindketten emberek, vagy mindketten vámpírok. Természetesen egy házaspár esetében az elmeállapotuk különböző lehet. Egyszer egy házaspár, Pista bácsi és Juliska néni, a következőket állították magukról:

Pista bácsi: Legalább egyikünk őrült.
Juliska néni: Ez nem igaz!
Pista bácsi: Mindketten emberek vagyunk.

Ők emberek vagy vámpírok? Melyiküknek milyen az elmeállapota?

Pista bácsi és Juliska néni ellentmondanak egymásnak, ezért egyik igazat mond, a másik pedig nem. Mivel mindketten emberek, vagy mindketten vámpírok, következik, hogy legalább az egyikük őrült (mivel ha mindketten egészséges emberek lennének, akkor mindketten igazat mondanának, ha viszont mindketten egészséges vámpírok lennének, akkor mindkettőjük állítása hamis lenne). Tehát Pista bácsi igazat mond, amikor azt állítja, hogy legalább az egyikük őrült. Ezért igaz a Pista bácsi második állítása is. Következik, hogy mindketten emberek, ugyanakkor Pista bácsi egészséges, míg Juliska néni őrült.

Boronkay György Műszaki Középiskola és Gimnázium
2600 Vác, Németh László u. 4- 6.
☎: 27- 317 - 077 ☎/fax: 27- 315 - 093
WEB: http://boronkay.vac.hu **e-mail:** boronkay@vac.hu

Levelező Matematika Szakkör ***2018/2019.***

DÖNTŐ

7. OSZTÁLY

1.) Oldd meg a prímszámok körében a következő egyenletet!

$$\mathbf{5x + 17y = 290}$$

Mivel 5x és 290 osztható 5-tel, ezért 17y-nak is oszthatónak kell lennie 5-tel. Ezért y osztható 5-tel és mivel prímszám, y = 5. Az egyenlet így alakul

$$5x + 85 = 290 \quad / -85$$

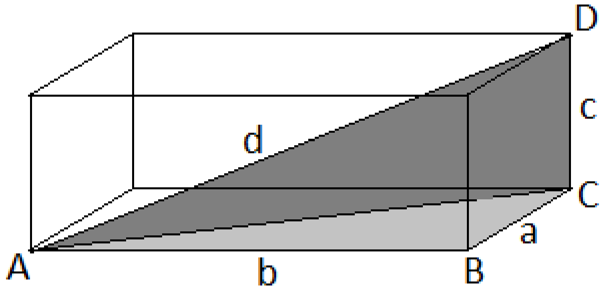
$$5x = 205 \quad / :5$$

$$x = 41, \text{ ami prím.}$$

<u>Tehát a megoldás: x = 41, y = 5.</u>

2.) Számítsd ki a téglatest testátlójának hosszát, ha az élek hossza 3, 4 és 12!

Ha egy téglatest éleit a, b, és c, testátlóját pedig d jelöli, akkor $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$, ugyanis



$d^2 = AC^2 + c^2 = (a^2 + b^2) + c^2$ (lásd a rajz). Eszerint: $d^2 = 3^2 + 4^2 + 12^2 = 169$, <u>ahonnan d = 13.</u>

3.) Az asztalon 40 db gyufaszál van, s ketten felváltva vesznek 2, 3, 4 vagy 5 szálat. Az a játékos veszít, aki utolsóként vesz. Melyik játékosnak van nyerő stratégiája? Hogyan tudja azt megvalósítani?

Rákmódszerrel dolgozunk. Visszafele a nyerő helyek: 2, 9, 16, 23, 30, 37. Tehát a kezdő játékos először 3-at vesz, majd ellenfele lépését mindig 7-re egészíti ki, így az általa az asztalon hagyott gyufák száma rendre 37, 30, 23, 16, 9, 2. Ekkor a második játékosnak a maradék két gyufát kell elvennie, így veszít.
<u>Tehát a kezdő játékosnak van nyerő stratégiája.</u>

4.) Melyik szám a nagyobb:

$$\frac{\mathbf{2^{10}-1}}{\mathbf{2^{10}}} \quad \textbf{vagy} \quad \frac{\mathbf{2^{20}-1}}{\mathbf{2^{20}}} \ \textbf{?}$$

$$\frac{2^{10}-1}{2^{10}} = 1 - \frac{1}{2^{10}} < 1 - \frac{1}{2^{20}} = \frac{2^{20}-1}{2^{20}}$$

<u>Tehát a második szám a nagyobb.</u>

Boronkay György Műszaki Középiskola és Gimnázium
2600 Vác, Németh László u. 4- 6.
☎: 27- 317 - 077 ☎/fax: 27- 315 - 093
WEB: http://boronkay.vac.hu e-mail: boronkay@vac.hu

Levelező Matematika Szakkör **2018/2019.**

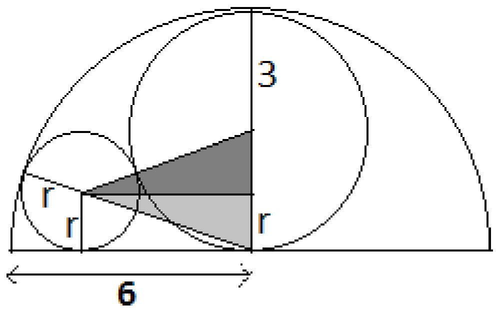
DÖNTŐ

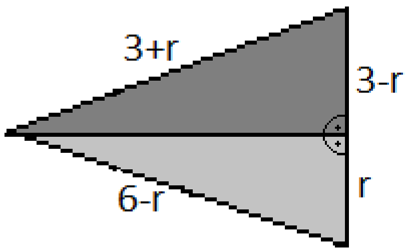
8. OSZTÁLY

1.) Mutassuk meg, hogy két egymás utáni páratlan prímszám összege legalább három (nem feltétlenül különböző) prímszám szorzata!

Legyen p és q a két prím. Ekkor p+q páros, $p + q = 2 \cdot \frac{p+q}{2}$. Ráadásul $\frac{p+q}{2}$ összetett, hiszen két szomszédos prím között van, tehát legalább két, nem feltétlenül különböző prím szorzata (számelmélet alaptétele). Így p+q legalább három, nem feltétlenül különböző prímszám szorzata.

2.) Számítsd ki az ábrán látható legkisebb kör sugarát!





Az ábra szerint:

$$(3 + r)^2 - (3 - r)^2 = (6 - r)^2 - r^2,$$

$$12r = 36 - 12r,$$

$$r = \frac{3}{2}.$$

3.) Két játékos játszik. Az első mond egy egész számot, ami 1-nél nagyobb és 10-nél kisebb. A második játékos megszorozza ezt a számot egy, az előbbi feltételeknek eleget tevő számmal. Ezt a szorzatot most az előző szorozza egy, a megadott számkörből való számmal és így tovább. A játékot az nyeri, aki szorzatával először lépi túl az 1000-et. Melyik játékosnak van nyerő stratégiája?

Okoskodjunk visszafelé. Akinél a szorzat 56 és 111 között van (a határokat is beleértve), az ellenfelének következő lépése után 1000 fölé jut. Ugyanígy látható, hogy az előző nyerő intervallum a 4, 5, 6 számokból áll. Tehát a kezdő nyerhet.

4.) Melyik szám a nagyobb: 11^{1979} vagy 37^{1320}?

$11^{1979} < 11^{1980} = (11^3)^{660} = 1331^{660} < 1369^{660} = (37^2)^{660} = 37^{1320}$.

Tehát a második szám a nagyobb.